Е. Железова, С. Измалков, К. Сонин, И. Хованская

Теория и практика двусторонних рынков

(Нобелевская премия по экономике 2012 года)

В статье обсуждаются основные результаты теории двусторонних рынков, за которую Ллойд Шепли и Элвин Рот получили в 2012 г. Нобелевскую премию в области экономики. Подробно описаны знаменитый алгоритм «отложенного согласия», предложенный Гейлом и Шепли, а также алгоритм главных циклов Шепли—Скарфа в применении к брачным рынкам и к проблеме распределения абитуриентов по вузам. На простых примерах показано, как работают эти алгоритмы. Обсуждается, как алгоритм Гейла—Шепли может использоваться для повышения эффективности при поступлении абитуриентов в российские вузы.

Ключевые слова: двусторонние рынки, алгоритм Гейла—Шепли, рынок труда, дизайн механизмов.

JEL: B21, B31, C78, D47.

Знаменитый результат экономической теории — первая теорема благосостояния — сводится к утверждению о том, что рынки эффективны. А именно: в децентрализованной экономике, при установившихся ценах товары и услуги производятся и распределяются так, что в результате их нельзя перераспределить, не ухудшив благосостояния какого-то из агентов. Верно и более сильное утверждение: никакое подмножество множества всех экономических субъектов не сможет перераспределить ресурсы внутри себя так, чтобы увеличить благосостояние каждого члена этой коалиции. Наличие цен, способность торговать каждым товаром и предположение о том, что каждый экономический агент воспринимает сложившуюся на рынке цену как заданную, когда решает, что производить и что потреблять, — ключевые предпосылки, на которых основан этот результат. А важный вывод состоит именно в эффективности (по Парето) окончательного размещения товаров между экономическими агентами.

Реальная жизнь значительно сложнее идеального рынка, описанного выше: в частности, не для всех товаров существуют конкурентные

Железова Евгения Борисовна, специалист Schneider Electric (Москва); *Измалков Сергей Борисович*, PhD, проф. Российской экономической школы (Москва); *Сонин Константин Исаакович* (ksonin@nes.ru), к. ф.-м. н., проф., проректор Российской экономической школы; *Хованская Ирина Аскольдовна*, к. ф.-м. н., проф. Российской экономической школы, сотрудник ИНИИ ВШЭ (Москва).

рынки и не на все товары можно установить цены. Работы, отмеченные Нобелевским комитетом по экономике в 2012 г., посвящены исследованию взаимодействий и рынков, на которых деньги не используются, не могут использоваться или не играют ключевой роли. Основное внимание направлено именно на связи между экономическими агентами. На так называемых *двусторонних рынках* (two-sided markets) агенты на одной стороне рынка (например, продавцы какого-то товара) взаимодействуют только с некоторым небольшим числом агентов на другой стороне, и важно то, кто с кем в итоге будет связан. Самое простое взаимодействие происходит в ситуации, когда агенты разбиваются на пары.

Классические примеры двусторонних рынков, встречающиеся во многих областях экономической науки, выглядят так: женщины-мужчины, работники-фирмы, школьники-школы и студенты-университеты, производители-магазины, а также доноры-больные, нуждающиеся в пересадке органов. Обычно любое такое взаимодействие называют рынком, хотя как таковой торговли нет и цены на «товар» может и не существовать. Когда необходимо подчеркнуть, сколько участников взаимодействия с каждой стороны, про рынки говорят «один-на-один», «один-на-много» или «много-на-много». Женщины-мужчины и больные-доноры — примеры рынков один-на-один; работник-фирма, студенты-университеты — примеры рынков один-на-много; поставщики-магазины — пример рынка много-на-много.

Естественный вопрос для таких рынков: «Кто оказывается в паре с кем?». Или, более формально, какие связи (matches) будут сформированы на таких рынках. А главный вопрос, на решении которого сконцентрированы усилия экономистов — и теоретиков, и практиков, — выглядит так: существует ли *устойчивое размещение* агентов (matching) на таких рынках? Когда такое размещение (разбиение агентов на пары на рынках типа один-на-один) существует, естественно ожидать, что именно оно (или одно из них, если размещений несколько) сложится в реальной жизни.

В этой статье мы разберем часть основных результатов, полученных Ллойдом Шепли и Элвином Ротом, лауреатами Нобелевской премии по экономике 2012 г., и проиллюстрируем их с помощью простых примеров (в значительной степени опирающихся на примеры из цитируемой литературы).

Модель Гейла—Шепли

В 1962 г. американские ученые Дэвид Гейл и Л. Шепли предложили математическую модель двусторонних рынков, сформулировали задачу об устойчивости и решили ее. В приложении к рынкам типа один-на-один эта задача получила название «stable marriage problem (SMP)», или задача марьяжа. В данной модели рассматриваются два типа участников: мужчины и женщины. Каждая женщина по-своему ранжирует мужчин, а каждый мужчина по-своему ранжирует женщин. Размещение агентов — это набор пар, состоящих из одного мужчины и одной женщины, и индивидуальных агентов (холостяков). Основной вопрос об устойчивости сформулирован так: существует ли стабильное размещение (stable matching), или стабильный набор связей, на таком рынке? Набор стабилен, если нет пары, которая не связана узами брака между собой и хочет пожениться, или индивида, который связан, но хочет быть холостяком.

Почему такой вопрос имеет значение? Если стабильного размещения не существует, то это означает, что в любой момент находится индивид или пара, «смотрящие на сторону», которые хотят изменить текущее размещение. Если они это сделают, то найдутся другие, которые захотят сделать то же самое, и т. д. Если связи продуктивны, то отсутствие стабильных связей создает серьезную экономическую и социальную проблему. Быть может, институт брака в современном виде, как и другие подобные институты — калым, брачные контракты при рождении, продажа жен в Вавилоне, — существуют именно для решения этой проблемы. С другой стороны, если стабильное размещение существует, то как его найти? Возникнет ли стабильное размещение, если агенты будут сами сходиться и разрывать отношения, или нужны свахи и сайты знакомств?

Гейл и Шепли показали, что стабильные размещения существуют, но, что не менее важно, доказали это конструктивно. Они предложили *алгоритм*, позволяющий найти стабильное размещение. Этот алгоритм прост и практичен, он используется на некоторых централизованных рынках труда, например для распределения школьников по школам в городах Америки и Великобритании, и во многих других местах. В Российской экономической школе, где работают авторы этой статьи, упрощенная версия алгоритма применяется для распределения студентов по исследовательским семинарам, в которых они обязаны участвовать на втором году обучения.

Именно практическое применение алгоритма Гейла—Шепли принесло ему большую славу. Особенно это касается современных рынков труда, где существует много проблем, в том числе рынков, на которые в массовом порядке выходят желающие найти работу, например выпускники колледжей и университетов. И дело не в количестве одновременно выходящих на рынок специалистов — работодатели могут специально создавать рабочие места в соответствии с этим процессом. Дело в *сложности координации одновременного поиска работы и работников*. Например, представим себе, что фирма A, рассмотрев документы работника S, решила сделать ему предложение. Если работника S полностью устраивает предложение и фирма A очень ему нравится, он может просто согласиться, и на этом дело закончится. Но если у работника S есть другие предложения или он ожидает их появления? Тогда S захочет отложить ответ на предложение от A. Если A не согласится, то S придется рискнуть: согласившись, он, вероятно, упустит лучшую возможность, а отказавшись, он, быть может, не получит лучшее предложение в дальнейшем. Если фирма A будет ждать, то она рискует: S может не согласиться, и ей придется искать другого кандидата. Пока A ждет, она не может по-настоящему рассматривать других кандидатов. Получается, что на рынке будут происходить серьезные задержки с наймом для многих работников, потому что и работники, и фирмы будут тянуть время в надежде получить наилучший для них вариант.

Эта проблема координации на некоторых рынках породила другую проблему. Чтобы получить лучших выпускников, фирмы могут делать предложения заблаговременно, надеясь опередить остальных. В Америке на рынке молодых юристов, а в начале XX в. — на рынке врачей-стажеров, дело дошло до того, что фирмы подписывали контракты после первого (из четырех) лет обучения, когда еще ничего про выпускника не известно. Именно из-за проблемы координации некоторые университеты проводят ранний набор студентов, пытаясь заполучить лучших студентов до того, как на них посмотрят другие вузы.

Возможное решение этой проблемы — централизация координационного (распределительного) процесса. В середине XX в. американские госпитали договорились использовать централизованную систему распределения врачей-стажеров: все будущие врачи и госпитали сообщают свои пожелания, и, основываясь на сообщенных предпочтениях, алгоритм предлагает возможные пары стажер—госпиталь. Эта система была признана очень эффективной и существует в модифицированном виде до сих пор. Удивительно, но в основе этой системы лежит алгоритм Гейла—Шепли. Они, не зная об этой системе, теоретически доказали ее эффективность.

Размещение врачей по клиникам

В начале XX в. больницы приглашали выпускников медицинских колледжей работать в качестве интернов для прохождения практики (см.: Roth, 1984; Roth, Sotomayor, 1992). После нескольких неудачных попыток организовать распределение интернов по больницам, в основном путем ограничения времени на принятие решения, было обнаружено, что проблемы с путаницей и неорганизованностью процесса так решить нельзя. Вместо этого было принято решение использовать специальный алгоритм для распределения стажеров по больницам. Работал он следующим образом.

1. Будущие интерны и больницы обменивались информацией друг о друге.
2. Каждый из участников эксперимента составлял собственный лист предпочтений.
3. После выполнения первых двух этапов, на основании списка предпочтений каждого из участников эксперимента алгоритм автоматически распределял студентов по больницам.

В идеале студент должен был подписать договор именно с той больницей, которую ему предложил алгоритм. Первый эксперимент распределения при помощи алгоритма был неудачным, так как у студентов был стимул составлять лист предпочтений, не отражающий их действительные намерения. Усовершенствованный алгоритм был впервые применен в 1951 г. и использовался до середины 1990-х годов.

Данная система распределения не была обязательной, но в эксперименте приняли участие больше 95% студентов и больниц. Эта цифра оставалась неизменной до 1970 г. Чем дольше алгоритм использовался, тем больше росло недовольство им со стороны студентов. С одной стороны, алгоритм был составлен так, чтобы оптимизировать распределение с точки зрения госпиталей. А с другой стороны, достаточно много участников (порядка 1000 из 20 000) хотели найти работу вместе с кем-то еще (например, мужем или женой). В базовом виде алгоритм не учитывал совместные предпочтения. В 1995 г. Роту предложили модифицировать алгоритм, чтобы учесть семейные связи, и с 1997 г. используется новый модифицированный алгоритм (см.: Roth, Peranson, 1999).

Теория Гейла—Шепли: модель марьяжа

В каждом практическом приложении алгоритма Гейла—Шепли естественно использовать терминологию, диктуемую практикой. Чтобы рассказать о базовом теоретическом механизме рынка «один-на-один», мы используем терминологию «женщины-мужчины».

Рассмотрим два конечных непересекающихся множества игроков: $M = \{m_1, ..., m_n\}$ — мужчины и $W = \{w_1, ..., w_m\}$ — женщины. У каждого мужчины есть предпочтения на множестве женщин. Предпочтения мужчины m_i можно представить в виде упорядоченного списка $P(m_i)$ элементов множества $W \cup \{m_i\}$. Например, $P(m_4) = w_3\, w_2\, m_4\, w_5 \dots w_1$ означает, что мужчине m_4 больше всех нравится женщина w_3, затем женщина w_2, женщина w_1 ему нравится меньше всего, и он предпочитает оставаться холостяком, чем быть в паре с любой женщиной, кроме женщин w_3 и w_2. Аналогично, предпочтения женщины w_j — это упорядоченный список $P(w_j)$ элементов множества $M \cup \{w_j\}$. Для удобства при описании попарных сравнений, следующих из заданных предпочтений, мы будем использовать сравнения $>_{m_i}$ и $>_{w_i}$. Например, $w_2 >_{m_4} w_5$ согласно представленным выше предпочтениям мужчины m_4. Предполагается, что все предпочтения строгие.

Обозначим через P набор предпочтений всех игроков $P = \{P(m_1), P(m_2), ..., P(m_n), P(w_1), ..., P(w_m)\}$. Разумеется, как мужчины, так и женщины, могут иметь отличающиеся от других предпочтения на множестве лиц противоположного пола. Таким образом, модель марьяжа задается при помощи двух множеств игроков M и W, а также набора предпочтений P.

Размещением или *распределением по парам (matching)* μ называется взаимно однозначное отображение множества $M \cup W$ на себя, обладающее следующими свойствами:

1. $\mu(m_i) \in W \cup \{m_i\}$; $\mu(w_j) \in M \cup \{w_j\}$, то есть каждый мужчина или каждая женщина соединен(а) с лицом противоположного пола или остается холостым (незамужней);

2. если $\mu(m_i) = w_j$, то $\mu(w_j) = m_i$, то есть если мужчина m_i соединен с женщиной w_j, то женщина w_j соединена с мужчиной m_i.

Распределение по парам называется *нестабильным*, если существует блокирующая пара или индивид. А именно, если:

1. существуют мужчина m_i и женщина w_j, такие, что $m_i >_{w_j} \mu(m_i)$ и $w_j >_{m_i} \mu(m_i)$, то есть они предпочитают связаться друг с другом, чем оставаться с партнерами в распределении μ, или

2. существует мужчина m_i, для которого $m_i >_{m_i} \mu(m_i)$, или женщина w_j, для которой $w_i >_{w_i} \mu(w_i)$, то есть мужчина или женщина, которые в одностороннем порядке хотят разорвать связь, предписанную им в распределении μ.

Распределение по парам *стабильно*, если не существует блокирующих индивидов или пар.

Рассмотрим множества $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ и набор предпочтений P, заданный на этих множествах:

$$P(m_1) = w_2 w_1 w_3;\ P(w_1) = m_2 m_1 m_3;$$
$$P(m_2) = w_1 w_2 w_3;\ P(w_1) = m_3 m_1 m_2;$$
$$P(m_3) = w_1 w_2 w_3;\ P(w_1) = m_1 m_2 m_3;$$

Распределение по парам можно также задать самими парами. Пусть $\mu_1 = \{(m_1 w_3), (m_2 w_2), (m_3 w_1)\}$. Легко заметить, что данное распределение по парам нестабильно. Действительно, оно блокируется парой $(m_1 w_2)$. А распределение $\mu_2 = \{(m_1 w_2), (m_2 w_3), (m_3 w_1)\}$ стабильное.

Согласно теореме Гейла—Шепли, м*ножество стабильных распределений по парам не пустое* (Gale, Shapley, 1962). Для доказательства этой теоремы был предложен алгоритм, который и получил название «алгоритм Гейла—Шепли». Он включает ряд итераций, или этапов, и работает следующим образом.

1. На первом этапе каждый холостой мужчина делает предложение наиболее привлекательной для него женщине. Если одиночество для него предпочтительнее, то он выходит из игры. Каждая женщина рассматривает все сделанные ей предложения. Самому достойному кандидату, в соответствии со своими предпочтениями, она говорит «может быть», всем остальным «нет». Теперь она «помолвлена» с самым приглянувшимся из женихов, и этот жених считается «помолвленным» с ней, а все остальные остаются «свободными». Если женщина предпочитает одиночество текущему лучшему кандидату, то она отвергает его. Женщинам, у которых нет предложений, остается ждать.

2. На следующем этапе каждый «свободный» (отвергнутый) мужчина делает предложение следующей в его списке предпочтений женщине. Затем каждая женщина сравнивает «старое» и новые предложения, и отвергает все, кроме одного, самого привлекательного.

3. Так, этап за этапом, отвергнутые мужчины делают предложения женщинам, двигаясь вниз по своим спискам.

4. Алгоритм прекращает работу, когда больше нет мужчин, желающих сделать предложения, то есть каждый «свободный» мужчина сделал предложение всем женщинам, которых он предпочитает одиночеству, и был отвергнут.

5. Все «помолвленные» пары сходятся, а все остальные, если такие имеются, остаются одиночками.

Доказательство стабильности полученного размещения почти тривиально. Действительно, по конструкции алгоритма не может существовать мужчина, который связан с женщиной, но предпочитает остаться холостяком, так как он не должен был делать предложение такой женщине, или женщина, которая связана с мужчиной, но предпочитает одиночество, так как она должна была отвергнуть такого мужчину. Допустим, что существует пара, которая хочет порвать текущую связь и установить новую. Так как мужчина предпочитает женщину в новой паре своей паре, полученной в результате алгоритма, то это означает, что он по ходу процесса делал предложение этой женщине. Но его предложение было отвергнуто и это означает, что текущий партнер данной женщины лучше данного мужчины с ее точки зрения. Значит, блокирующих пар нет.

(Алгоритм Гейла–Шепли; см.: Roth, Sotomayor, 1992). Пусть предпочтения мужчин заданы следующим образом:

Антон:	Маша	Лена	Нина	Катя	Оля
Борис:	Оля	Маша	Нина	Катя	Лена
Валерий:	Лена	Маша	Катя	Нина	Оля
Геннадий:	Оля	Лена	Маша	Катя	Нина
Денис:	Лена	Нина	Маша	Оля	Катя,

а предпочтения женщин таковы:

Катя:	Антон	Валерий	Геннадий	Денис	Борис
Лена:	Антон	Геннадий	Борис	Денис	Валерий
Маша:	Денис	Борис	Валерий	Антон	Геннадий
Нина:	Антон	Валерий	Борис	Геннадий	Денис
Оля:	Геннадий	Борис	Денис	Валерий	Антон

Этап 1. На этом этапе каждый мужчина делает предложение самой предпочитаемой женщине, а женщины принимают предложение самого предпочитаемого мужчины. Слева показаны предложения, а справа, в таблице, кто какие предложения получил и кого выбрал.

Антон	→ Маша
Борис	→ Оля
Валерий	→ Лена
Геннадий	→ Оля
Денис	→ Лена

Катя	Лена	Маша	Нина	Оля
	~~Валерий~~	Антон		~~Борис~~
	Денис			Геннадий

Этап 2. На этом этапе все отвергнутые мужчины, а именно Валерий и Борис, делают новые предложения следующим в их списках женщинам.

Валерий	→ Маша
Борис	→ Маша

Катя	Лена	Маша	Нина	Оля
	Денис	~~Антон~~		Геннадий
		~~Валерий~~		
		Борис		

Этап 3

Валерий	→ Катя
Антон	→ Лена

Катя	Лена	Маша	Нина	Оля
Валерий	~~Денис~~	Борис		Геннадий
	Антон			

Этап 4

Денис	→ Нина

Катя	Лена	Маша	Нина	Оля
Валерий	Антон	Борис	Денис	Геннадий

На этом алгоритм закончил свою работу. Получившиеся пары: Валерий–Катя, Антон–Лена, Борис–Маша, Денис–Нина и Геннадий–Оля.

Несложно заметить, что результат работы алгоритма *не зависит* от того, делают мужчины предложения одновременно или последовательно, и если последовательно, то в каком порядке, а также от того, в каком порядке женщины отказываются от худших предложений. Главное, чтобы среди тех, кто должен совершить действие (сделать или отвергнуть предложение), кто-то такое действие выполнил. Каким бы ни был порядок, каждый мужчина сделает в точности те же предложения, которые он сделал бы в поэтапном алгоритме, описанном выше. Каждая женщина в итоге получит те же самые предложения, а значит, выберет того же самого «суженого».

В алгоритме, описанном выше, мужчины делают предложения женщинам. Назовем его M-алгоритмом, а полученные связи (распределение по парам) μ_M. Можно рассмотреть W-алгоритм, в котором женщины делают предложения. В результате также получится стабильное распределение по парам μ_W. Совпадают ли эти распределения и существуют ли другие? Оказывается, что *если $\mu_M = \mu_W$, то это единственное стабильное распределение по парам*. А если стабильных распределений много, то они частично сравнимы по Парето (часть доминирует остальные в смысле Парето-эффективности).

Распределение по парам μ_1 *предпочтительнее с точки зрения мужчин, чем* распределение μ_2, $\mu_1 \succcurlyeq_M \mu_2$, если для всех i, $\mu_1(m_i) \geq_{m_i} \mu_1(m_i)$, то есть каждый мужчина имеет ту же или лучшую, с его точки зрения, партнершу в распределении μ_1, чем в μ_2. Распределение μ_1 *строго предпочтительнее с точки зрения мужчин, чем* распределение μ_2, $\mu_1 \succ_M \mu_2$, если $\mu_1 \succcurlyeq_M \mu_2$ и существует i, для которого $\mu_1(m_i) \succ_{m_i} \mu_2(m_i)$. Точно так же можно определить отношения предпочтения с точки зрения женщин, $\succcurlyeq_W$ и $\succ_W$.

Если распределения по парам μ_1 и μ_2 стабильны и $\mu_1 \succcurlyeq_M \mu_2$, то $\mu_2 \succcurlyeq_W \mu_1$, то есть если всем мужчинам из двух стабильных распределений лучше в одном из них, то всем женщинам в нем хуже.

Допустим, что это не так. Например, существует женщина j, для которой $\mu_1(w_j) \succ_{w_j} \mu_2(w_j)$. Но тогда, если $w_j = \mu_1(w_j)$, распределение по парам μ_2 не стабильно, так как блокируется женщиной w_j. Если рассмотреть $m_i = \mu_1(w_j)$, то, поскольку $m_i \neq \mu_1(w_j)$, должно быть $\mu_1(m_i) \succ_{m_i} \mu_2(m_i)$, значит, пара $(m_i w_j)$ блокирует μ_2.

Можно доказать, что в модели марьяжа распределение по парам μ_M, получающееся в результате M-алгоритма, предпочтительнее с точки зрения мужчин, чем любое другое стабильное распределение по парам, и наихудшее из стабильных распределений по парам для женщин. Соответственно распределение μ_W — наилучшее для женщин и наихудшее для мужчин. Если $\mu_M = \mu_W$, то это единственное стабильное распределение по парам (Gale, Shapley, 1962; Roth, 1982).

Рассмотрим пример, в котором сначала женщины выбирают мужчин, а потом мужчины выбирают женщин, и сравним результаты.

Предпочтения мужчин:

Павел:	Зина	Жанна	Ира
Роман:	Жанна	Зина	Ира
Сергей:	Ира	Зина	Жанна

Предпочтения женщин:

Жанна:	Роман	Павел	Сергей
Зина:	Сергей	Павел	Роман
Ира:	Павел	Роман	Сергей

Оптимальное стабильное распределение для мужчин μ_M: Павел—Зина, Роман—Жанна, Сергей—Ира. Оптимальное стабильное распределение для женщин μ_W: Павел—Ира, Роман—Жанна, Сергей—Зина.

Сравним полученные пары. Действительно, для мужчин распределение μ_M лучше, чем μ_W. Получаем, что *сторона, которая делает предложения, оказывается в большем выигрыше*. Можно отметить еще несколько интересных фактов. Роман и Жанна связаны друг с другом и в μ_M, и в μ_W. Из оптимальности этих распределений следует, что если одна и та же пара сформирована в этих двух распределениях, то она будет сформирована во всех стабильных распределениях[1].

Мы рассмотрели модель рынков один-на-один, но все результаты легко обобщить на рынки один-на-много, которые Гейл и Шепли также анализировали. Модель один-на-много обычно называют моделью распределения студентов по университетам (college admissions problem, см.: Roth, 1985; Roth, Sotomayor, 1989; Roth, 2003).

Задача распределения студентов по университетам

Как и в предыдущей модели, существует два конечных непересекающихся множества колледжей (или университетов) и студентов. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ — множество абитуриентов, а $C = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$ — множество университетов. У каждого абитуриента свои предпочтения среди университетов — список $P(a_i)$ из элементов множества $C \cup \{a_i\}$. А у университетов имеются предпочтения среди студентов — список $P(C_j)$ из элементов множества $A \cup \{C_j\}$. $C_u >_{a_i} C_w$ означает, что абитуриент a_i предпочитает университет C_w университету C_u. Каждый абитуриент может быть зачислен только в один университет, но каждый университет может принять несколько студентов. Пусть $q_j > 0$ обозначает максимальное количество (квоту) студентов, которых может принять университет C_j.

В этой модели предпочтения университетов на группах студентов полностью определяются списком индивидуальных предпочтений. Для любого подмножества студентов $S \subset A$, состоящего из не более чем $q_j - 1$ студентов, и для любых двух студентов $a_1, a_2 \notin S$,

$$S \cup \{a_1\} >_{c_j} S \cup \{a_2\} \Leftrightarrow \{a_1\} >_{c_j} \{a_2\},$$
$$S \cup \{a_1\} >_{c_j} S \cup \{C_j\} \Leftrightarrow \{a_1\} >_{c_j} \{C_j\}.$$

При наличии места университет C_j всегда предпочтет взять студента, которого он предпочитает в индивидуальном порядке, вне зависимости от того, какие студенты поступили в C_j.

Как и для модели марьяжа, ключевое понятие — стабильность распределения. Распределение студентов по университетам *стабильно*, если не существует блокирующего индивидуального агента или пары, состоящей из университета и группы студентов.

[1] Отметим также, что если работа алгоритма начинается с того, что предложения делают мужчины, а не женщины, то ни одному из мужчин не выгодно сообщать неправду о своих истинных предпочтениях, независимо от того, каковы предпочтения других участников алгоритма (Roth, 1982).

Результаты Гейла и Шепли прямо обобщаются на модель поступления абитуриентов в университеты. Существует стабильное распределение студентов по университетам, которое может быть найдено конструктивно, в результате работы слегка подправленного алгоритма Гейла—Шепли. В версии алгоритма, в которой предложения делают абитуриенты, единственное отличие заключается в том, что университеты могут временно принимать более одного предложения, но в пределах квоты. А в версии алгоритма, в которой предложения делают университеты, последние могут посылать несколько предложений одновременно, но в пределах квоты. Рассмотрим работу алгоритма на конкретном примере.

Рассмотрим алгоритм Гейла—Шепли для распределения студентов по университетам, в котором предложения делают студенты.

Предпочтения студентов:

Наташа:	ВШЭ/РЭШ	Йель	Беркли	Гарвард	Оксфорд
Костя:	ВШЭ/РЭШ	Беркли	Гарвард	Оксфорд	Йель
Анна:	ВШЭ/РЭШ	Беркли	Гарвард	Оксфорд	Йель
Макар:	ВШЭ/РЭШ	Беркли	Оксфорд	Гарвард	Йель
Татьяна:	ВШЭ/РЭШ	Гарвард	Йель	Беркли	Оксфорд

Предпочтения университетов (в скобках квота):

ВШЭ/РЭШ (2):	Костя	Анна	Наташа	Макар	Татьяна
Йель (3):	Наташа	Татьяна	Макар	Костя	Анна
Беркли:	Татьяна	Макар	Анна	Наташа	Костя
Гарвард:	Анна	Татьяна	Наташа	Костя	Макар
Оксфорд:	Наташа	Костя	Макар	Анна	Татьяна

Этап 1. На этом этапе каждый абитуриент подает документы в свой самый предпочитаемый университет, а университеты оставляют предложения самых предпочитаемых студентов. Слева показаны предложения, а справа, в таблице, выбор и отклоненные заявки.

Наташа	⟶ ВШЭ/РЭШ				
Костя	⟶ ВШЭ/РЭШ				
Анна	⟶ ВШЭ/РЭШ				
Макар	⟶ ВШЭ/РЭШ				
Татьяна	⟶ ВШЭ/РЭШ				

ВШЭ/РЭШ (2)	Йель (3)	Беркли	Гарвард	Оксфорд
~~Наташа~~				
Костя				
Анна				
~~Макар~~				
~~Татьяна~~				

Этап 2

Наташа	⟶ Йель
Макар	⟶ Беркли
Татьяна	⟶ Гарвард

ВШЭ/РЭШ (2)	Йель (3)	Беркли	Гарвард	Оксфорд
Костя	Наташа	Макар	Татьяна	
Анна				

На этом алгоритм закончил свою работу.

Полученное распределение: в Совместный бакалавриат ВШЭ/РЭШ поступают Костя и Анна, в Йель — Наташа, в Беркли — Макар, в Гарвард — Татьяна.

Модель распределения по вузам с квотами

Главное отличие данной модели от предыдущей заключается в том, что предпочтения колледжей могут относиться не к конкретным абитуриентам, а к целым группам. Например, вуз может стремиться иметь равное количество женщин и мужчин, при этом неважно, какие именно женщины и мужчины окажутся студентами.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ — множество абитуриентов, $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ — множество колледжей, а q_u обозначает квоту колледжа c_u. Пусть P^i — список строгих независимых предпочтений абитуриента i среди колледжей C, где $c >_a c'$ обозначает, что абитуриент a предпочитает колледж c колледжу c'. Аналогичное условие выполняется и для колледжа c $(a >_c a')$. В рамках данной модели будут рассмотрены только строгие предпочтения.

Распределением по парам μ называется взаимно однозначное отображение множества $A \cup C$ на себя, обладающее следующими свойствами:

1) $\mu(a) = 1$ для каждого абитуриента и $\mu(a) = a$, если $\mu(s) \notin C$ (в ситуациях, когда студент не принят ни в какой колледж, его называют «self-matched»);

2) $\mu(C) = q_c$ для каждого колледжа C (количество распределений абитуриент—колледж не должно превышать квоту), если количество студентов в μ (C) меньше q_c, то $\mu(C)$ содержит $q_c - r$ копий C (если колледж может принять еще нескольких студентов, но предпочитает не делать этого, то он будет «self-matched» в каждой из этих позиций);

3) $a \notin \mu(C)$ тогда и только тогда, когда $\mu(a) = C$.

Распределение абитуриентов по колледжам «двустороннее» (см. пункт 3 определения). Это означает, что студент зачислен в предложенный алгоритмом колледж только в том случае, если студент удовлетворяет требованиям колледжа. Если студент и колледж не подходят друг другу, говорят, что данное распределение *индивидуально нерационально.*

Пусть $\mu(a_1) = C$ означает, что абитуриент a_1 совмещен с колледжем C при помощи распределения μ, а $\mu(C) = \{a_1, a_3, C, C\}$ — что колледж C при квоте $q_c = 4$ принимает абитуриентов a_1 и a_3 и в данном колледже еще две свободные позиции.

До сих пор мы рассматривали только индивидуальные предпочтения вузов по отношению к каждому из студентов. Так как студент может быть соединен только с одним колледжем, а один колледж может быть соединен с группой абитуриентов, можно предположить, что каждый колледж, квота которого больше единицы, имеет возможность сравнить группы абитуриентов как альтернативные распределения. Попробуем рассмотреть предпочтения колледжей среди групп абитуриентов.

Допущение о предпочтениях колледжей среди групп студентов означает, что распределение $\mu(C)$ дает возможность колледжу C выбрать двух студентов, стоящих на третьем и четвертом местах в списке предпочтений C, а $\mu'(C)$ предполагает выбор второго и четвертого в этом списке абитуриентов. Допустим, колледж C предпочитает распределение $\mu'(C)$ распределению $\mu(C)$ $(\mu'(C) \succ \mu(C))$. В частности, рассмотрим список предпочтений $P^*(C)$, обозначающий список предпочтений колледжа C в отношении всех абитуриентов, желающих в него поступить в рамках некоторого распределения μ.

Отношение предпочтений $P^*(C)$ будет считаться *чутким в отношении предпочтений* $P(C)$ среди индивидуальных студентов, если для каждого из двух распределений, которые отличаются только наличием одного из студентов, он предпочитает распределение, содержащее более предпочтительного студента.

Отношение предпочтений $P^*(C)$ среди групп студентов называется *ответным (по отношению к списку предпочтений* $P(C)$*)* среди индивидуальных абитуриентов, если всякий раз, когда $\mu'(C) = \mu(C) \cup \{s_k\} \backslash \{\alpha\}$ для каждой α в распределении $\mu(C)$ и a_k не в распределении $\mu(C)$, C распределение $\mu'(C)$ предпочитает распределению $\mu(C)$ (под $P^*(C)$) тогда и только тогда, когда C предпочитает s_k α (под $P(C)$).

Пусть $\mu'(C) \succ_c \mu(C)$ означает, что для колледжа C, согласно его списку предпочтений $P^*(C)$, $\mu'(C)$ предпочтительнее $\mu(C)$. В данном случае мы рассматриваем список предпочтений P^*, поэтому предпочтения не обязательно должны быть строгими. Отметим, что предпочтения C могут быть нестрогими по отношению к связям $\mu'(C)$ и $\mu(C)$, но по отношению к абитуриентам они всегда должны быть строгими. Например, колледжу может быть все равно — зачислить двух студентов, которые находятся на первом и четвертом местах в списке предпочтений колледжа, или двух студентов, которые находятся на втором и третьем. Тем не менее список предпочтений $P(C)$ может быть получен из $P^*(C)$ с помощью предпочтений колледжа C среди связей $\mu(C)$, содержащих не более одного абитуриента (и $q_c - 1$ копий c). Рот доказал, что если у колледжа строгие предпочтения относительно абитуриентов, то предпочтения колледжей будут строгими и среди любой группы абитуриентов, присвоенной ему алгоритмом, даже если предпочтения будут нестрогими среди других групп абитуриентов (Roth, 1982).

Если при распределении студенты предпочитают быть зачисленными в другие колледжи, отличные от тех, которые им предложил алгоритм, и это желание обоюдное, они могут исправить ошибку при помощи перераспределения. Как и раньше, распределение называется нестабильным, если участники алгоритма могут его улучшить при помощи другого распределения, а правила алгоритма позволяют им это сделать. Иными словами, пара колледж—студент (C, s) может улучшить свое положение при помощи μ, если $\mu(\mathrm{s}) \neq C$ и $C \succ_s \mu(s)$ и $s \succ_s \alpha$ для некоторого α в $\mu(C)$. Отметим, что α может быть равно некоторому студенту s' в множестве $\mu(C)$, а в случае, когда одна или несколько позиций колледжа C свободны в $\mu(C)$, α может равняться C.

Распределение называется стабильным, если оно не может быть улучшено никем из участников или парой участников. Множество стабильных распределений равно основе — множеству распределений, заданных слабым доминированием. Таким образом, стабильное распределение является подмножеством основы. Чтобы увидеть, почему результат, который не строго доминируем, может быть нестабильным, предположим, что колледж C с квотой 2 стоит первым в списке предпочтений студентов s_1, s_2 и s_3 и у него есть собственный список предпочтений $P(C) = s_1, s_2, s_3$. Следовательно, распределение $\mu(C) = \{s_1\, s_3\}$ может быть улучшено при помощи пары (C, s_2), но итоговое распределение, $\mu'(C) = \{s_1, s_2\}$ включает группу, состоящую из трех агентов, $\{C, s_1, s_2\}$, и студент s_1 безразличен по отношению к распределениям μ и μ', так как он соединен с C в обоих случаях[2].

Модель распределения рабочих по фирмам

Рассмотрим два конечных непересекающихся множества фирм $F = \{f_1, ..., f_n\}$ и рабочих $W = \{w_1, ..., w_m\}$. Для упрощения модели предположим, что у всех фирм одинаковая квота, равная общему числу рабочих m, то есть каждая фирма может нанять всех рабочих, если пожелает.

Распределением по парам μ называется взаимно однозначное отображение множества $F \cup W$ на себя, обладающее следующими свойствами:

1) $|\mu(w)| = 1$[3] для каждого рабочего и $\mu(W) = W$, если $\mu(w) \notin F$ (в ситуациях, когда рабочего не нанимает никакая фирма, его называют «self-matched»);

2) $|\mu(w)| \leq m$ для каждой фирмы f. ($[\mu(f)] = \emptyset$, если и только если f не соединено с каким-либо рабочим);

3) $w \notin \mu(F)$ тогда и только тогда, когда $\mu(w) = F$.

У каждого рабочего есть свой список независимых предпочтений среди фирм. У каждой фирмы есть свой независимый список предпочтений среди групп рабочих (подмножеств W). Например, предпочтения рабочего w могут быть записаны в виде списка предпочтений $P(w) = f_i, f_j, f_k, w$, а список предпочтений фирмы $P''(f) = s_1, s_2, s_3, \emptyset$, где s_i — подмножество множества W. Итак, сталкиваясь со множеством s рабочих, фирма должна решить, какую группу рабочих она больше всего хочет нанять. Обозначим выбор фирмы f через $Ch_f(s)$. Это означает, что для каждого подмножества s из W выбор фирмы $Ch_f(s)$ удовлетворяет следующим свойствам: $Ch_f(s)$ является подмножеством s и $Ch_f(s) >_f s'$ для любого другого подмножества s', содержащегося в s. Так как предпочтения строгие, всегда найдется единственная группа рабочих s', которую фирма предпочтет нанять.

Предпочтения фирмы f среди групп рабочих *взаимозаменяемы*, если для каждой группы s, в которую входят рабочие w и w', из того, что $w' \in Ch_f(s)$, следует, что $w \in Ch_f(s \setminus w')$.

Это означает, что если предпочтения фирмы f взаимозаменяемы, и фирма f очень желает нанять некоторого конкретного работника, то она наймет данного работника в составе любой группы, и такие группы будут для фирмы f субститутами.

[2] Множество стабильных распределений всегда непустое и содержит оптимальное стабильное распределение для каждого множества игроков. Отметим, что если предпочтения колледжей среди групп студентов безответные, множество стабильных распределений может быть пустым.

[3] Здесь и далее $|X|$ обозначает количество элементов в множестве X.

В отличие от модели «фирмы и работники» предпочтения университетов среди групп студентов не будут взаимозаменяемыми, то есть для университета важнее состав группы в целом, чем один конкретный студент.

Алгоритм главных циклов

Описанное выше решение задачи марьяжа применимо к любым двусторонним рынкам «один-на-один», в которых обе стороны имеют предпочтения на множестве агентов противоположной стороны и получающиеся связи задаются парами типа «кто с кем».

Однако возможны и другие типы двусторонних взаимодействий. Существуют двусторонние рынки со связями типа «кто с чем», например: жители—дома, работники—офисы, студенты—комнаты общежития. Ключевое отличие таких рынков в том, что одна сторона, а именно физические объекты, не имеет собственных предпочтений. Кроме того, для таких рынков часто объекты уже распределены полностью или частично среди субъектов. Соответственно описанный ранее алгоритм «отложенного согласия» не применим напрямую, так как он не учитывает права собственности. Кроме того, даже если произвольным образом задать «предпочтения» объектов на множестве субъектов, будут ли полученные решения иметь разумные свойства?

Учитывая, что только одна сторона рынка имеет предпочтения, можно предположить, что формализация и решение задачи перераспределения объектов между субъектами должны быть проще, чем для двусторонних рынков типа «кто с кем». Так и есть, хотя, как ни удивительно, первые формальные результаты появились несколько позже. В 1974 г. Шепли и Г. Скарф опубликовали статью, в которой поставили и решили эту задачу, причем тоже конструктивно, предложив другой знаменитый алгоритм — *алгоритм главных циклов* («top trading cycles algorithm»).

Задача перераспределения домов заключается в следующем. Имеются два типа «агентов» — владельцы домов и сами дома. Владельцы домов могут заглядываться на дома соседей. Главный вопрос: существуют ли стабильные размещения домов среди владельцев, такие, что никакая подгруппа владельцев не захочет перераспределить дома между собой? И как такие стабильные размещения находить, особенно учитывая первоначальные права собственности?

Рассмотрим два конечных множества: $M = \{m_1, ..., m_n\}$ — люди и $H = \{h_1, ..., h_m\}$ — дома. Как и ранее, у каждого человека имеются строгие предпочтения на множестве домов, заданные для владельца m_i в виде упорядоченного списка $P(m_i)$ элементов множества $H \cup \{m_i\}$. Альтернатива m_i означает «остаться без дома», а *распределением* μ называется взаимно однозначное отображение множества $M \cup H$ на себя, обладающее следующими свойствами:

(1) $\mu(m_i) \in H \cup \{m_i\}$ и $\mu(h_j) \in M \cup \{h_j\}$ — каждый дом либо пустует, либо кому-то принадлежит, а каждый человек либо владеет домом, либо нет;

(2) если $\mu(m_i) = h_j$, то $\mu(h_j) = m_i$, то есть если человек m_i владеет домом h_j, то h_j принадлежит m_i.

Распределение домов по владельцам μ называется *стабильным*, если не существует блокирующей коалиции $C \subseteq M$. Коалиция *C блокирует* μ, если существует такой способ перераспределить дома, которыми владеет коалиция C, между членами этой коалиции, что всем членам C станет лучше.

Для любого начального распределения домов по владельцам *существует единственное стабильное перераспределение*. Оно может быть найдено в результате работы алгоритма главных циклов (Shapley, Scarf, 1974).

Для каждого участника в игре, где нужно сначала сообщить свои предпочтения, а затем будет применен алгоритм главных циклов, правдивое сообщение предпочтений — доминирующая стратегия. Более того, получаемое решение устойчиво к коалиционным отклонениям.

Алгоритм главных циклов работает следующим образом. Начиная с любого человека, определим дом, который ему нравится больше всего, и хозяина этого дома. Затем выберем наиболее предпочитаемый дом для этого хозяина и соответственно хозяина этого (второго) дома. Так продолжается до тех пор, пока не обнаружится цикл среди хозяев. Поскольку количество людей конечно, такой цикл всегда найдется. Когда цикл найден, все внутри этого цикла получают дома, которые они ценят выше всего (тот, на который они указали, когда пришла их очередь выбирать). Может так оказаться, что цикл будет состоять из одного человека, показывающего на свой собственный дом или не желающего владеть никаким домом.

Все люди и дома внутри цикла, после перераспределения, выбывают из дальнейшего рассмотрения. Далее, начиная с любого человека из оставшихся, процедура повторяется, только теперь можно указывать только дома тех, кто еще находится в рассмотрении. Алгоритм заканчивает работу, когда все люди выбыли из рассмотрения. Все прочие дома остаются без владельцев.

Почему результат, на котором останавливается алгоритм, стабилен? Допустим, что это не так. Тогда существует какая-то коалиция домовладельцев, которая может улучшить благосостояние всех своих членов, перераспределив дома между ними. Выберем произвольного члена этой коалиции. Раз его благосостояние можно улучшить, значит, он получит дом кого-то, кто выбыл из работы алгоритма перед ним (в «более главном» цикле). Но и тот должен получить дом кого-то из более главного цикла. Учитывая, что подниматься вверх по циклам невозможно до бесконечности, найдется член коалиции, положение которого нельзя улучшить.

Заметим также, что результат работы алгоритма не зависит от того, с кого он начинается. Действительно, назовем главными все самые верхние циклы, то есть те, в которых владельцы показывают на самые желанные дома. Очевидно, что все эти циклы будут реализованы вне зависимости от того, с кого начинаются этапы алгоритма. Убрав главные циклы, мы увидим, что тот же аргумент верен и для циклов «второго» уровня, и т. п.

Рассмотрим любой главный цикл. Его состав полностью определяется предпочтениями агентов внутри цикла и не зависит от действий (а значит, и предпочтений) остальных. Поэтому алгоритм не манипулируем, так как при заданных предпочтениях остальных никто не может «влезть» в более высокий цикл, а значит, получить дом лучше, чем в результате работы алгоритма (см. также: Данилов, Сотсков, 1991).

Предположим, что количество владельцев и домов одинаково и каждый предпочитает иметь хотя бы какой-то дом. Можно сразу переобозначить все дома так, чтобы владелец с индексом i жил в доме с индексом i.

Пусть имеются 9 человек. Предпочтения каждого можно задать в виде последовательности из 9 цифр. Например, 1: 567891234 (владелец дома 1 предпочитает в первую очередь дом 5, затем 6, ...).

Предположим, что мы начали с владельца 1, в результате работы алгоритма получилось: 1→5→4→9→2→4. Значит, мы получили цикл 4→9→2→4; владельцы 4, 9 и 2 меняются (по кругу) между собой, получая наилучшие для себя варианты, и выбывают. Продолжаем процесс, опять начав с владельца 1, и получаем, например, 1→5→5. Это означает, что из оставшихся домов (когда 2, 4 и 9 уже не доступны) игрок 5 предпочитает свой собственный дом. Он выбывает из дальнейшего рассмотрения, оставаясь в этом доме. Далее, опять стартуя с игрока 1, получаем, например: 1→7→3→8→3, владельцы 3 и 8 меняются домами. Далее: 1→7→1, 1 и 7 меняются, после чего остается один владелец, 6: 6→6.

Что произойдет, если изначально никто никакими домами не владеет? Как достичь стабильного размещения? Конечно, можно распределить дома произвольным образом, а затем применить алгоритм главных циклов. Но можно применить процедуру, которая называется *серийное диктаторство* (serial dictatorship). Эта процедура заключается в следующем. Будущие владельцы упорядочиваются произвольным образом (например, случайно), а затем по порядку выбирают наилучший для себя дом из свободных. Очевидно, что в результате получится стабильное размещение, для которого в случае запуска алгоритма главных циклов все циклы будут размера 1. Можно показать, что, варьируя изначальное упорядочение будущих владельцев, можно получить все возможные стабильные размещения.

А что делать, если часть домов занята, а часть свободна и есть люди, не владеющие домами? Например, такая ситуация возникает в общежитиях (предполагая что один человек живет в одной комнате), когда часть студентов заканчивает учебу и заезжают новые. Можно случайным образом распределить свободные комнаты между новичками и применить алгоритм. А можно выбрать порядок среди всех субъектов и с этим порядком запускать алгоритм главных циклов. Как только кто-то показывает на свободную комнату, цикл замыкается.

Практические алгоритмы распределения школьников

В начале XXI в. механизмы распределения, основанные на тех же базовых идеях, что и алгоритм Гейла—Шепли, получили широкое распространение. В частности, на такие механизмы распределения школьников по государственным школам в США перешли Нью-Йорк, Бостон, Новый Орлеан, Вашингтон и Денвер.

На самом общем уровне механизм выглядит следующим образом. Потенциальные ученики и школы составляют свои списки предпочтений, при этом школы не знают предпочтения учеников. Далее начинает работать алгоритм распределения.

Каждый ученик подает заявку в школу, наилучшую с его точки зрения (первую в его списке предпочтений). Каждая из школ отвергает учеников, не входящих в ее список предпочтений, и удерживает заявки наиболее желательных с точки зрения школы учеников. Число удерживаемых заявок не должно превышать размер (квоту) школы; эти ученики считаются временно зачисленными. Всем не попавшим в этот список сообщают об отказе.

На последующих стадиях работы алгоритма ученик, получивший отказ, двигается дальше по своему списку предпочтений. Каждая школа удерживает заявления предпочитаемых учеников и отказывает остальным. Алгоритм прекращает работу, когда школы перестают кому-либо отказывать и каждая школа получает учеников, исходя из имеющихся заявок.

К достоинствам этого алгоритма можно отнести то, что ни один ученик не получит сразу несколько предложений. Также можно отметить, что для учеников стратегия составлять список своих истинных предпочтений доминирующая. К сожалению, эту простую схему нельзя применить на практике. Далее мы попробуем разобраться, в чем состоят основные препятствия и как их можно преодолеть.

Почему возникает проблема распределения школьников по школам? Можно надеяться, что все само собой разрешится в равновесии без всякого централизованного механизма. Допустим, у каждой школы есть своя квота на первоклассников и пусть директор каждой школы решает, как отбирать детей. Может быть, это будут те, чьи родители первыми принесли заявления, или случайно выбранные их тех, кто принесет заявления к определенному сроку, или только те, кто пройдет дошкольную подготовку в данной школе, и если таких будет слишком много, то среди прошедших будут выбраны лучшие. А родители пусть сами беспокоятся, отдают детей на подготовительные курсы, находят школы, в которые легко поступить.

Очевидно, что такое децентрализованное решение очень неэффективно. Родители несут излишние издержки, направленные на поиск и устройство в школу. Например, если в школы будут поступать те, кто подал заявление раньше, то можно ожидать, что родители будут выстраиваться в очередь и организовывать заранее запись на поступление в школу. Куда попадут дети тех, кто не смог устроить ребенка в самую предпочтительную для себя школу? Или в ближайшую школу? Такие родители будут нести излишние издержки после распределения. Кроме того, если директор отвечает за прием детей, он становится объектом давления со стороны родителей, что может способствовать взяточничеству.

Дополнительной (и существенной) проблемой децентрализованного решения является сложность координации. Например, если разрешить подавать заявления только в одну школу, то те, кто не попадет в самую предпочтительную для себя школу, могут не успеть подать заявление в свой «второй выбор» (об аналогичной проблеме с поступлением в вузы по ЕГЭ см. ниже). Опасения, что в хороших школах не хватит мест, могут заставить родителей подать единственное заявление в заведомо слабую школу. Если же разрешить подавать заявления в несколько школ (не специфицируя упорядочения), то возникнут другие проблемы координации.

Задачу распределения школьников по школам можно сформулировать следующим образом. Как разместить школьников по школам так, чтобы распределение было справедливым, основанным на равных правах школьников на получение образования, и эффективным, учитывающим предпочтения родителей? В идеале хотелось бы добиться эффективности по Парето, то есть такого распределения, при котором никакую группу детей, записанных в конкретные школы, нельзя было поменять между собой местами так, чтобы всем стало лучше.

Как уже говорилось выше, возможное решение задачи состоит в использовании алгоритма Гейла—Шепли, оптимального для школьников (то есть варианта алгоритма, в котором школьники делают предложения). Однако в прямом виде такой алгоритм использовать нельзя: чтобы это сделать, нужно определить предпочтения обеих сторон. Соответственно возникает проблема определения предпочтений школ. Подобные предпочтения не могут строго упорядочивать возможных школьников, так как это будет нарушать принципы справедливости и равенства прав школьников в выборе школы. На практике можно использовать некоторые дополнительные критерии, например, близость школы к месту проживания, наличие брата или сестры, уже обучающихся в школе, возможность успешной сдачи определенных тестов. Однако это все равно не даст строгого упорядочения каждой пары школьник—школа. Естественное решение в такой ситуации — случайно упорядочить всех, кто попадает в одну категорию, тем самым получив строгие предпочтения.

Заметим, что поскольку предложения будут делать школьники, то для всех них оптимально правдиво сообщить свои предпочтения относительно школ. В результате работы алгоритма мы получим стабильное распределение. Более того, это распределение будет удовлетворять критерию отсутствия оправданной зависти (justified envy). Оправданная зависть существует, если ребенок, который находится в более высокой категории по предпочтениям школ (например, близко живет), не попал в школу, куда принят ребенок из более низкой категории.

Но будет ли такое распределение эффективным по Парето? Для искусственно построенных предпочтений школ — да, так как это следует из стабильности получаемого результата. Однако при отсутствии таких предпочтений (что и происходит на практике) этот результат не верен.

Рассмотрим следующий пример. Есть три ребенка и три школы, каждая из которых может принять одного ребенка. Предпочтения детей и школ заданы следующим образом (индексы i_j для детей и s_j для школ):

$$\begin{array}{ll} i_1 : s_2 > s_1 > s_3; & s_1 : i_1 > i_3 > i_2; \\ i_2 : s_1 > s_2 > s_3; & s_2 : i_2 > i_1 > i_3; \\ i_3 : s_1 > s_2 > s_3. & s_3 : i_2 > i_1 > i_3. \end{array}$$

Результатом оптимального для школьников алгоритма и вообще единственным стабильным разбиением будет: (i_1, s_1), (i_2, s_2), (i_3, s_3). Однако школьники 1 и 2, поменявшись своими школами, получат более предпочтительные варианты. Получается, что если мы будем учитывать предпочтения школ в алгоритме Гейла—Шепли, то стабильное распределение школьников по школам в результате применения алгоритма может оказаться неоптимальным по Парето с точки зрения школьников (Roth, 1982; Abdulkadiroğlu, Sönmez, 2003).

Можно ли найти Парето-оптимальное распределение школьников по школам? Оказывается, можно, если правильно модифицировать алгоритм главных циклов. В простейшем случае, когда у всех школ нет предпочтений на множестве школьников, разместить детей по школам можно простым применением процедуры серийного диктаторства. А именно упорядочить детей случайным образом (что будет справедливо), и в этом порядке предложить каждому ребенку выбрать лучшую для него школу среди тех, в которых остались свободные места. Точно так же можно случайным образом распределить детей по школам, а затем запустить алгоритм главных циклов.

Когда у школ имеются предпочтения или ограничения, например школы обязаны отдавать предпочтения тем, кто живет в шаговой доступности, или поддерживать гендерный баланс, набирая не менее 40% школьников каждого пола, то нужно только слегка модифицировать описанный ранее алгоритм. Предположим, что у школ заданы критерии, по которым одни дети более предпочтительные, чем другие. Для каждой школы все дети, попадающие в одну категорию предпочтения, упорядочиваются случайным образом. Категории также выстраиваются в порядке важности. В результате у всех школ имеются строгие предпочтения на множестве школьников.

Затем все школьники случайным образом упорядочиваются. В этом порядке школьник указывает наилучшую школу, в которой он хочет учиться. Школа, в свою очередь, указывает своего самого предпочитаемого школьника. Тот — на свою лучшую школу и т. д., пока не получится цикл. Как только цикл возник, школьники внутри цикла распределяются по своим наиболее предпочтительным школам, а школы получают своих самых желанных школьников. Эти школьники выбывают из дальнейшего рассмотрения, а у школ остается на одно место меньше. Процедура запускается снова и снова, пока все школьники не будут размещены.

С помощью такого же аргумента, как у Шепли—Скарфа, можно показать, что получающееся распределение будет эффективно по Парето с точки зрения школьников. Для каждого школьника улучшение возможно, если он поменяется со школьником из более главного цикла. Но это не может быть одновременно выполнено для всей меняющейся группы. Точно так же, как и ранее, получающееся распределение не манипулируемо школьниками: для каждого оптимально правдиво сообщать свои предпочтения. Однако в отличие от результата работы алгоритма Гейла—Шепли итоговое распределение не обязательно стабильно и может не удовлетворять условию отсутствия оправданной зависти.

Какой способ размещения школьников по школам следует выбирать на практике? Это может зависеть от того, какие свойства этих алгоритмов важнее. Если нужно полностью исключить несправедливость, то оптимальный для школьников алгоритм отложенного согласия будет лучшим выбором. Если важнее эффективность, то алгоритм главных циклов лучше. Заметим, что оба алгоритма достаточно просты и в обоих школьникам выгодно правдиво сообщать о своих предпочтениях.

На практике многие города мира, включая Москву, использовали и используют различные централизованные схемы распределения школьников по школам, а некоторые страны, например Турция и Венгрия, используют централизованный алгоритм для размещения студентов. Сам факт применения таких схем решает множество координационных проблем. Отчасти из-за их видимой пользы используемые схемы порой не оптимальны.

В Бостоне, например, начиная с 1999 г. использовался следующий механизм. Каждый школьник предлагал упорядоченный список школ, а предпочтения школ формировались с помощью категорий предпочтений со случайным распределением внутри каждой категории. Затем в первом раунде рассматривались только первые по списку школы для каждого студента, и школы выбирали из полученных предложений в соответствии со своими категориями и квотами. Все студенты, получившие место в первом раунде, выбывали из дальнейшего рассмотрения. В следующем раунде рассматривались вторые по списку школы для всех оставшихся студентов, и т. д. (см.: Abdulkadiroğlu, Sönmez, 2003; Abdulkadiroğlu et al., 2005).

На первый взгляд такая процедура выглядит разумной и похожа на алгоритм Гейла—Шепли. Однако можно заметить, что она приводит к целому ряду проблем. Рассмотрим, например, первый раунд. Одна конкретная школа может получить больше заявок, чем количество мест в ней. Значит, она выйдет из дальнейшего рассмотрения. Но могут быть претенденты, не получившие места в первом раунде, у которых эта школа на втором месте и которые попадают в более приоритетную категорию для нее. Значит, нет стабильности, а есть оправданная зависть. Более того, у школьников есть стимулы манипулировать информацией о своих предпочтениях. Например, они могут ставить на первые места школы, попасть в которые у них больше шансов, а не те, которые они действительно предпочитают. Обнаружив эти проблемы, мэрия Бостона решила в 2005 г. перейти на алгоритм Гейла—Шепли.

Использование алгоритма для распределения абитуриентов по вузам

Начиная с 2009 г., каждый российский школьник по окончании одиннадцатого класса сдает обязательный набор экзаменов (ЕГЭ), которые служат одновременно и вступительными экзаменами в университеты. Казалось бы, процесс перехода из школы в институт должен быть гораздо легче, чем до появления ЕГЭ. Однако в действительности все еще больше усложнилось, главным образом из-за того, что большинство абитуриентов отсылают свои заявки в несколько институтов одновременно, откладывая окончательный выбор на последний момент. В этом разделе мы обсуждаем вариант распределения абитуриентов по вузам при помощи алгоритма Гейла—Шепли.

Отметим, что эта модель достаточно общая: она включает возможность одновременного выбора среди платных и бесплатных отделений одних и тех же факультетов. Иными словами, с точки зрения абитуриента, например, экономический факультет (бюджетное отделение) и экономический факультет (коммерческое отделение) — это разные вузы.

Как будет выглядеть алгоритм Гейла—Шепли в данном случае? Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ — множество абитуриентов, $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ — множество факультетов российских университетов, а q_i обозначает квоту факультета F_i. Пусть P^i — список строгих независимых предпочтений абитуриента i среди факультетов (вариантов) F, где $f >_a f'$ означает, что абитуриент a предпочитает факультет f некоего университета факультету f'. Аналогичное условие выполняется и для факультета f $(a >_f a')$, точнее, должно выполняться.

Рассмотрим первый этап работы алгоритма. Предполагается, что все абитуриенты сдали ЕГЭ, результаты уже известны. Также известны предпочтения абитуриентов относительно вариантов. Пусть l — проходной балл, то есть необходимое количество баллов для зачисления. Абитуриент a_i считается зачисленным в вуз c_u, если он набирает определенное количество баллов, необходимых для поступления на конкретный факультет, при условии, что данный факультет соответствует первому месту в списке предпочтений абитуриента. Обозначим через $x_u(l) = \Sigma_i x_u^i(l)$ сумму всех абитуриентов, распределенных в колледж f_u. Проходной балл l считается допустимым, если $x_u(l) \leq q_u$ для каждого факультета $f_u \in F$.

Исходя из предпочтений абитуриента, его заявка автоматически отправляется только на тот факультет, который находится первым в его списке предпочтений. Если факультет на каждом из этапов работы алгоритма получает больше заявлений, чем может принять, то проходной балл этого факультета будет таким, чтобы число зачисленных абитуриентов не превышало квоту. В отличие от предыдущей модели распределения абитуриентов в данном алгоритме каждый вуз должен исчерпать свою квоту. Поэтому вводятся дополнительные критерии, которые по-разному ценятся в каждом вузе. К ним относится участие в олимпиадах или творческих конкурсах, проводимых данным факультетом. Дополнительные критерии вводятся для того, чтобы в случае одинаковых баллов по ЕГЭ можно было объективно предпочесть одного абитуриента другому. Иными словами, это дополнительный критерий, для того чтобы добиться строгих предпочтений факультетов относительно абитуриентов, в противном случае распределение не будет стабильным. Рассмотрим следующие этапы.

Пусть проходной балл после k-й стадии будет l_k. Если заявление абитуриента на k-й стадии было отклонено, то оно подается на следующий факультет f_u согласно списку предпочтений данного абитуриента, где оно получает соответствующее место в списке предпочтений факультета $l_k(f_u)$ (если имеется такой факультет в соответствующем списке предпочтений). Факультеты могут получить новые предложения, поэтому если количество предварительно зачисленных абитуриентов превышает квоту факультета, то устанавливается новый, повышенный проходной балл l_{k+1}, который является наименьшим и таким, чтобы число предварительно принятых абитуриентов не превышало квоту, предполагая, что все другие проходные баллы останутся прежними. В то же время факультет отклоняет все заявки абитуриентов, не набравших новый проходной балл.

Алгоритм останавливается, если новых заявок на тот или иной факультет нет и все бюджетные квоты исчерпаны. Итоговый проходной балл, естественно, считается достижимым. Также он стабилен, потому что, согласно алгоритму, когда проходной балл повышен в последний раз, не поступившие абитуриенты подают свои заявления в менее предпочтительный вуз. Таким образом, если проходной балл на последнем этапе был снижен одним из факультетов, абитуриенты будут зачислены и квота будет выполнена.

Распределение при помощи алгоритма Гейла—Шепли позволяет облегчить процесс распределения абитуриентов по вузам и повысить эффективность конечного распределения (см. также: Польдин, 2007). В частности, это позволяет повысить проходной балл и средний уровень абитуриентов на некоторых факультетах.

* * *

Нобелевская премия 2012 г. по экономике — идеальная иллюстрация взаимопроникновения чистой академической науки и самой что ни на есть реальной практики. Экономисты-теоретики Гейл и Шепли 50 лет назад, элегантно решив математическую задачу, разработали алгоритм, один из вариантов которого, как выяснилось позже, уже давно применялся на практике. Поскольку применение механизма сталкивалось с некоторыми сложностями, новое поколение исследователей — прежде всего второй из нобелевских лауреатов-2012, Рот — разработало целую серию модификаций исходного алгоритма. Это, в свою очередь, позволило расширить сферу применения механизмов, основанных на теории Гейла—Шепли, теперь с их помощью ежегодно распределяются по школам сотни тысяч детей в десятках городов и подбираются донорские органы для сотен людей.

Литература

Данилов В. И., Сотсков А. И. (1991). Механизмы группового выбора. М.: Наука. [Danilov V. I., Sotskov A. I. (1991). Choice Mechanisms. Moscow: Nauka.]

Польдин О. В. (2007). Моделирование выбора вуза абитуриентом при едином и раздельном экзаменах. Препринт НФ ГУ—ВШЭ No P1/2007/01. [Poldin O. (2007). Entrant Choice Modeling with a Single and Separate Examinations. WP SF HSE No P1/2007/01.]

Abdulkadiroğlu A., Sönmez T. (2003). School Choice: Amechanism Design Approach // American Economic Review. Vol. 93, No 3. P. 729—747.

Abdulkadiroğlu A., Pathak P. A., Roth A. E., Sönmez T. (2005). The Boston Public School Match // American Economic Review. Vol. 95, No 2. P. 368—371.

Gale D., Shapley L. S. (1962). College Admissions and the Stability of Marriage // American Mathematical Monthly. Vol. 69, No 1. P. 9—15.

Balinski M., Sönmez T. (1999). A Tale of Two Mechanisms: Student Placement // Journal of Economic Theory. Vol. 84, No 1. P. 73—94.

Roth A. E. (1984). The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: a Case Study in Game Theory // Journal of Political Economy. Vol. 92, No 6. P. 991—1016.

Roth A. E. (1985). The College Admissions Problem is Not Equivalent to the Marriage Problem //Journal of Economic Theory. Vol. 36, No 2. P. 277—288.

Roth A. E., Sotomayor M. A. O. (1992). Two-sided Matching: A Study in Game-theoretic Modeling and Analysis. Cambridge, N. Y.: Cambridge University Press.

Roth A. E. (1982). The Economics of Matching: Stability and Incentives // Mathematics of Operations Research. Vol. 7, No 4. P. 617—628.

Roth A. E. (1984). Misrepresentation and Stability in the Marriage Problem // Journal of Economic Theory. Vol. 34, No 2. P. 383—387.

Roth A. E. (2003). The Economist as Engineer: Game Theory, Experimentation, and Computation as Tools for Design Economics // Econometrica. Vol. 70, No 4. P. 1341—1378.

Roth A. E., Sotomayor M. A. O. (1989). The College Admissions Problem Revisited // Econometrica. Vol. 57, No 3. P. 559—570.

Roth A. E., Peranson E. (1999). The Redesign of The Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design // American Economic Review. Vol. 89, No 4. P. 748—780.

Shapley L., Scarf H. (1974). On Cores and Indivisibility // Journal of Mathematical Economics. Vol. 1, No 1. P. 23—37.

Two-Sided Markets: Theory and Applications (Nobel Memorial Prize in Economics 2012)

Evgeniya Zhelesova[1], *Sergei Izmalkov*[2], *Konstantin Sonin*[2], *Irina Khovanskaya*[2,3]

Authors affiliation: [1] Schneider Electric (Moscow, Russia); [2] New Economic School (Moscow, Russia); [3] National Research University Higher School of Economics (Moscow, Russia). Corresponding author: Konstantin Sonin, ksonin@nes.ru.

The paper provides an overview of major results in the theory of two-sided markets that brought the 2012 Nobel Memorial Prize in economics to Lloyd Shapley and Alvin Roth. We describe the celebrated Gale & Shapley deferred acceptance algorithm and Shapley & Scarf top trading cycles algorithm in applications to marriage and college admissions markets, and provide simple examples to illustrate the basic mechanics of these algorithms. We also explain how Gale & Shapley algorithm can be used to improve efficiency of college admission in Russia.

Keywords: two-sided markets, Gale—Shapley algorithm, labor market, mechanism design.

JEL: B21, B31, C78, D47.